## **基础课47 双曲线**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 双曲线的定义和标准方程 | 了解 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年天津卷  2023年北京卷 | ★★★ | 逻辑推理数学运算直观想象 |
| 双曲线的几何性质 | 了解 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理） | ★★★ | 逻辑推理数学运算直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，双曲线的定义、标准方程、几何性质一直是高考命题的热点，试题难度中等偏上，预计2025年命题热点在综合小题和解答题，复习要做到全面高效 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、双曲线的定义**

平面内与两个定点,的距离之差的绝对值等于非零常数（小于）的点的轨迹叫作①双曲线.这两个定点叫作双曲线的②焦点，两焦点间的距离叫作双曲线的③焦距.

集合,，其中,，且,为常数.

1.若④，则集合为双曲线；

2.若⑤，则集合为两条射线；

3.若⑥，则集合为空集.

##### **二、双曲线的标准方程和几何性质**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 标准方程 | |  |  |
| 图形 | |  |  |
| 性质 | 范围 | , | , |
| 对称性 | 对称轴：⑦轴,轴；对称中心：⑧原点 |
| 顶点 | ， | ， |
| 性质 | 渐近线 | ⑨ | ⑩ |
| 离心率 | ⑪, |
| ,,的关系 | ⑫ |
| 实、虚轴 | 线段叫作双曲线的实轴，它的长⑬；  线段叫作双曲线的虚轴，它的长⑭.  叫作双曲线的实半轴长，叫作双曲线的虚半轴长 |

###### **知识 拓展**

1.双曲线的焦点到渐近线的距离为.

2.过双曲线的一个焦点且与实轴垂直的弦的长为,也叫通径（最短焦点弦）.

3.若是双曲线右支上一点，，分别为双曲线的左、右焦点，则，.

4.等轴双曲线的渐近线互相垂直且离心率.

5.焦半径公式：若是双曲线上的任意一点，，分别为双曲线的左、右焦点，则,,其中.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 平面内到点,的距离之差等于6的点的轨迹是双曲线.( × )

（2） 平面内到点,的距离之差的绝对值等于8的点的轨迹是双曲线.( × )

（3） 方程表示焦点在轴上的双曲线.( × )

（4） 若方程表示双曲线,则实数的取值范围是.( √ )

2. （易错题）已知方程表示双曲线，则实数的取值范围是.

**【易错点】**本题需要根据焦点的位置进行分类讨论，这是容易忽视致错的地方.

[解析]①当焦点在轴上时，解得；②当焦点在轴上时，解得.故的取值范围是.

##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修①P121·练习T1改编）已知双曲线的焦点分别为,，且经过点，则该双曲线的标准方程是.

[解析]设双曲线的方程为，则解得则该双曲线的标准方程是.

4. （苏教版选修①P99·T8改编）若双曲线的一条渐近线经过点，则该双曲线的离心率为.

[解析]由已知可得双曲线的渐近线方程为，点在渐近线上，故，所以,则.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·北京卷]已知双曲线的焦点为和，离心率为，则的标准方程为.

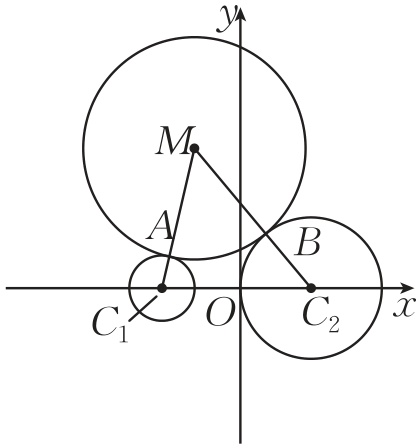
[解析]令双曲线的实半轴长、虚半轴长分别为,，显然双曲线的中心为原点，焦点在轴上，其半焦距，由双曲线的离心率为，得，解得，则，所以双曲线的方程为.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 双曲线的定义及应用［自主练透］**

1. 已知圆和圆,动圆同时与圆及圆相外切,则动圆圆心的轨迹方程为.

[解析]如图所示,设动圆与圆及圆分别外切于点,.



根据两圆外切的条件,

得,.

,

,

即,

点到两定点，的距离的差是常数且小于.

又根据双曲线的定义,得动点的轨迹为双曲线的左支（点与的距离大,与的距离小）,其中,,则，

故圆心的轨迹方程为.

2. 已知,分别为双曲线的左、右焦点,点在上, ,则的面积为.

[解析]不妨设点在双曲线的右支上,则,在中,由余弦定理,得,

,

.

3. [2024·北京校考]已知是双曲线的右焦点,是左支上一点.,当的值最小时,在轴上找一点,使的值最小,最小值为( A ).

A. B. 10 C. D.

[解析]设双曲线左焦点的坐标为，根据双曲线的定义可知，所以当的值最小时，的值最小，此时,,三点共线.直线的方程为，与双曲线方程联立消去并化简得，解得或（舍去），

所以，故，则关于轴对称的点为，连接，交轴于（图略），此时取得最小值，且最小值为.

故选.



**双曲线定义应用的三种类型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 求方程 | 通过对题设条件分析、转化，明确动点满足双曲线的定义，便可直接求解其轨迹方程 |
| 焦点三角形问题 | 利用定义求焦点三角形的周长和面积.解决焦点三角形问题常利用双曲线的定义、正弦定理或余弦定理，结合，运用平方建立与的关系 |
| 求最值 | 利用转化或变形，借助三角形的性质或构造出“两点之间线段最短”求最值 |

【注意】

1.不能漏掉“绝对值”，否则轨迹是双曲线的一支；

2.“常数”小于,否则轨迹是两条射线或不存在.

3.确定焦点所在的坐标轴位置，否则容易漏解或错解.

#### **考点二 双曲线的标准方程［师生共研］**

典例1 求分别满足下列条件的双曲线的标准方程：

（1）两个焦点的坐标分别是，，双曲线上一点到两焦点距离之差的绝对值为6;

（2）虚轴长为12，离心率为；

（3）以椭圆长轴的端点为焦点，且经过点；

（4）与双曲线有公共渐近线，且过点.

[解析]（1）由题意得，双曲线的焦点在轴上，根据双曲线的定义得，,,则，所以双曲线的标准方程为.

（2）设双曲线的标准方程为或.

由题知，,由，得,,,

所以双曲线的标准方程为或.

（3）由题意得，双曲线的焦点在轴上，且.

设双曲线的标准方程为，则有，把点代入双曲线的标准方程得，解得，，所以双曲线的标准方程为.

（4）设与双曲线有公共渐近线的双曲线的方程为，将点代入,得，所以双曲线的方程为,即.



**求双曲线的标准方程的方法**

1.定义法：由题目条件判断出动点轨迹是双曲线,由双曲线的定义确定,或,从而求出,,再写出双曲线的方程.

2.待定系数法：先确定焦点在轴上还是在轴上,设出标准方程,再由条件确定,的值,即“先定型,再定量”,如果焦点位置不好确定,那么可将双曲线方程设为，根据条件确定,即可.特别地，①共渐近线的双曲线方程可设为；②共焦点的双曲线方程可设为.

##### **针对训练**

1. 已知,,,以为焦点的椭圆过,两点，则椭圆的另一个焦点的轨迹方程为.

[解析]因为,,，

所以,,,

因为,都在椭圆上，所以,,

故的轨迹是以,为焦点的双曲线的下支，又,，即,，所以，所以的轨迹方程为.

2. 已知双曲线，若在,,,,中恰有三点在双曲线上，则双曲线的方程为.

[解析]由双曲线性质可知，,关于原点对称，所以,一定在双曲线上，根据双曲线在第一象限的图象且，，，但，所以点不在双曲线上，即,,在双曲线上，代入双曲线方程解得

所以双曲线的方程为.

#### **考点三 双曲线的简单几何性质［多维探究］**

##### **渐近线角度1**

典例2（1） 已知双曲线的离心率为，则其渐近线方程为( D ).

A. B. C. D.

[解析]由，可得，故所求的双曲线的渐近线方程是，即.故选.

（2） [2024·山东模拟]已知双曲线的焦距为，实轴长为4，则的渐近线方程为( C ).

A. B. C. D.

[解析]由已知得，双曲线的焦点在轴上，双曲线的焦距,解得,双曲线的实轴长,解得,则,即双曲线的渐近线方程为.故选.



**涉及双曲线渐近线的常用结论**

1.求双曲线或的渐近线方程的方法是将右边的常数“1”变为“0”，即或，求解即可得到渐近线方程.

2.已知渐近线方程为，可设双曲线方程为.

【注意】两条渐近线的倾斜角互补，斜率互为相反数，且两条渐近线关于轴，轴对称.

##### **求离心率的值（范围）角度2**

典例3（1） [2024·黑龙江质检]若双曲线与直线没有交点，则双曲线离心率的取值范围为( C ).

A. B. C. D.

[解析]由题意知，双曲线的渐近线方程为，要使直线与双曲线无交点，则，即，则.

故选.

（2） [2023·新高考Ⅰ卷]已知双曲线的左、右焦点分别为,.点在上，点在轴上，,，则的离心率为.

[解析]依题意，设，则,，

在中，，则，解得或（舍去），

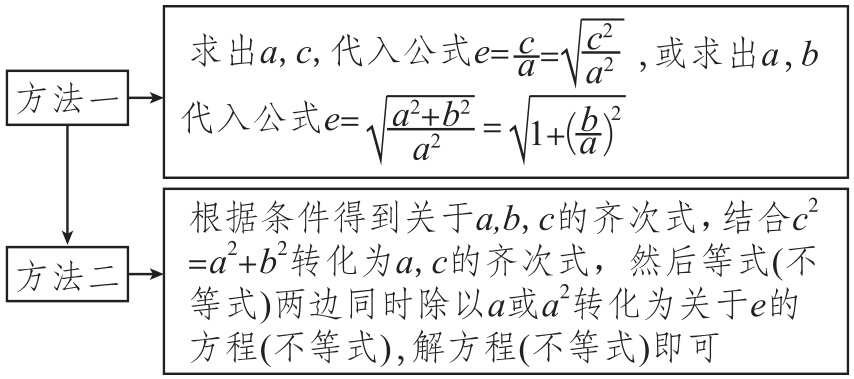
所以,，，则，

故，

所以在中，，整理得，故.



**求双曲线离心率（或其范围）的两种常用方法**



##### **与双曲线有关的最值、范围问题角度3**

典例4（1） 已知为坐标原点,直线与双曲线的两条渐近线分别交于,两点,若的面积为8,则的焦距的最小值为( B ).

A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

[解析]由题意知，双曲线的渐近线方程为, 直线与双曲线的两条渐近线分别交于,两点,不妨设点在第一象限,点在第四象限,

联立解得

故,

联立解得

故，

,.

双曲线,

其焦距为,

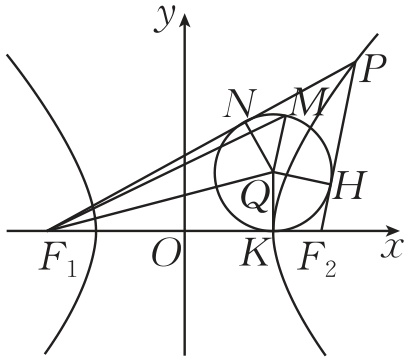
当且仅当时取等号,的焦距的最小值为8.故选.

（2） [2024·浙江质检]已知双曲线的左、右焦点分别为,,为双曲线右支上一点，为的内切圆上一点，则的取值范围为( C ).

A. B.

C. D.

[解析]如图，不妨取第一象限的点，设的内切圆分别与直线,,相切于,,，圆心为,由切线长的性质以及双曲线的定义可得，



又，所以，，

所以,设 ,且 为锐角，

因为，

所以,

解得.

为内切圆的半径，不妨设，

在中，，

,

当与的方向相同时，，当与的方向相反时，，所以.故选.



**与双曲线有关的最值、范围问题**

1.点在双曲线上,求相关式子（目标函数）的取值范围,常转化为函数的最值问题解决；

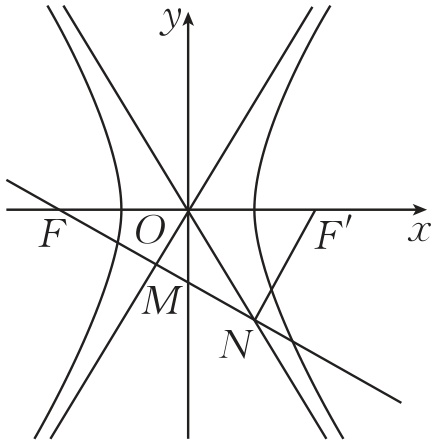
2.求双曲线焦距的最值问题,解题关键是掌握双曲线渐近线的定义和基本不等式求最值的方法,在使用基本不等式求最值时,要检验等号是否成立.

##### **多维训练**

1. [2024·遵义模拟]过双曲线的左焦点作的一条渐近线的垂线，垂足为，与的另一条渐近线交于点，且，则的渐近线方程为( B ).

A. B. C. D.

[解析]如图所示，设直线，为双曲线的渐近线，为右焦点，



由题意可知，因为，所以为的中点，

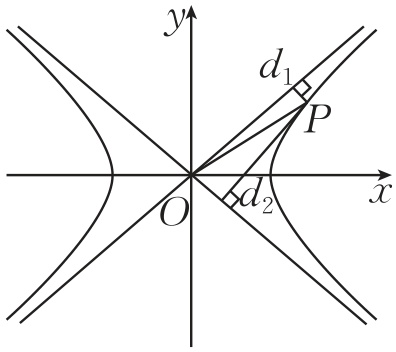
故为等腰三角形，即，故 ，所以直线，直线.故选.

2. [2024·无锡模拟]已知点在双曲线上，到两条渐近线的距离为，，若恒成立，则的离心率的最大值为( A ).

A. B. C. 2 D.

[解析]双曲线的渐近线方程为，即，

如图，设双曲线上的点，则，即，则到两条渐近线的距离分别为，，所以.又，，恒成立，所以，整理得，即，则离心率，则的离心率的最大值为.故选.



3. 已知在数列中，，点在双曲线上.若恒成立，则实数 的取值范围为( C ).

A. , B. , C. , D.

[解析]由题意可得，双曲线的渐近线方程为，

因为点在双曲线上，所以，

由，可得，

可知为递减数列，且，则为递减数列，

可得，且，可得.记点，则为直线的斜率，记，

由双曲线的性质以及为递减数列可知，为递减数列，即，且随着增大，直线越接近渐近线，所以接近于，所以，则.故选.

### **拓展教材 深度学习**

**椭圆、双曲线的第三定义**

椭圆、双曲线的第三定义：平面内到两定点，或,的斜率乘积等于常数的动点的轨迹叫作椭圆或双曲线，其中两个定点为椭圆或双曲线的两个顶点.

当常数时，轨迹为椭圆，当时，轨迹为双曲线.

1.以焦点在轴上的椭圆和双曲线为例，由第三定义易得如下结论：

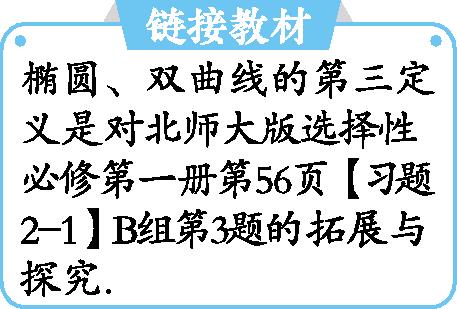
【结论1】若过原点的直线交椭圆于,两点，是椭圆上异于,两点的任意一点，则.（当,为长轴的两端点或短轴的两端点时也成立）

【结论2】若过原点的直线交双曲线于,两点，是双曲线上异于,两点的任意一点，则.（当,为实轴的两端点时也成立）

2.以焦点在轴上的椭圆和双曲线为例，由第三定义易得有关中点弦的如下推论：

【推论1】若为椭圆的不平行于对称轴的弦，是线段的中点，为坐标原点，则，即.

【推论2】若为双曲线的不平行于对称轴的弦，是线段的中点，为坐标原点，则，即.



典例 已知过原点的直线交椭圆于,两点，是椭圆上异于,两点的任意一点，则当,斜率存在时，判断是否为定值,并说明理由.

[解析]设,，则,,.

因为点,在椭圆上，所以

两式作差得，

即，

所以,为定值.

变式设问 若将典例中的条件“过原点的直线交椭圆于,两点，是椭圆上异于,两点的任意一点”改为“不过原点的直线交椭圆于,两点，是弦的中点，为原点”，则当,斜率存在时，判断是否为定值，并说明理由.

[解析]设,，则,,则,，

因为点,在椭圆上，所以

两式作差得，

即，

所以,为定值.

深度训练1 已知，，为双曲线上不同的三点，且满足（为坐标原点），直线，的斜率分别记为，，则的最小值为.

[解析]由知，，关于点对称，由双曲线的第三定义知，则，当且仅当即，时，“”成立，所以的最小值为.

深度训练2 [2023·全国乙卷]设,为双曲线上的两点，则下列四个点中可为线段的中点的是( D ).

A. B. C. D.

[解析]由双曲线的第三定义可知，设为线段的中点，即.

对于，,则，

联立消去得，

此时，故直线与双曲线没有交点，所以错误；

对于，，则，联立

消去得，此时，故直线与双曲线无交点，所以错误；

对于，，则，此时直线为双曲线的渐近线，故直线与双曲线无交点，所以错误；

对于，，则，联立

消去得，此时，故直线与双曲线有两个交点，所以正确.故选.